Einführung in den Raum der Funktionen mit beschränkter mittlerer Oszillation

Marc-Robin Wendt

Definition des Raumes BMO($\mathbb{R}^N$)
Seien $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N),\ Q \subset \mathbb{R}^N$ offener Würfel. Wir bezeichnen mit

$$u_Q := \fint_Q u(x)dx = \frac{1}{|Q|} \int_Q u(x)dx$$

den Mittelwert der Funktion u auf Q.
Dabei gelten folgende Rechenregeln, die unmittelbar aus den Eigenschaften des Integrals folgen:

1. $u_Q + v_Q = (u+v)_Q\ ,\ (au)_Q = au_Q,$
2. $u + v - (u+v)_Q = u - u_Q + v - v_Q,$
3. $\lambda u - (\lambda u)_Q = \lambda(u - u_Q),$
4. $u = c = const. \Rightarrow u_Q = c.$

Definition 1
1) $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ heißt von beschränkter mittlerer Oszillation, wenn

$$|u|_{\mathrm{bmo}} := \sup_{Q \subseteq \mathbb{R}^N} \left(\fint_Q |u(x) - u_Q| dx \right) < +\infty,\ Q \text{ Würfel in Standardlage.}$$

2) $\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \mid |u|_{\mathrm{bmo}} < +\infty\}.$

Mit den oben aufgeführten Rechenregeln ist $\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^N)$ ein Vektorraum. $|\cdot|_{\mathrm{bmo}}$ ist eine Halbnorm auf $\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^N)$. Die Homogenität sowie die Dreiecksungleichung folgen dabei direkt aus den Eigenschaften des Integrals.

In der Definition der Halbnorm könnten auch beliebige Würfel zugelassen werden, die sich nicht notwendig in Standardlage befinden müssen. Dadurch würde sich die Zahl der zugelassenen Funktionen in der Definiton des Funktionenraums $\mathrm{bmo}(\mathbb{R}^N)$ verringern. Im Sinne der Mengeninklusion gelten alle weiteren Aussagen auch für den „kleineren“ Funktionenraum, bei dessen Definition beliebige Würfel zugelassen wurden. Deswegen stellt die Beschränkung auf Würfel in Standardlage in Wirklichkeit eine Situation mit größerer Allgemeingültigkeit her.

Im Folgenden seien alle Würfel in Standardlage, d.h. die Kanten parallel zu den Koordinatenachsen gelegen.

Sei nun $u \in \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^N)$ mit $|u|_{\mathrm{bmo}} = 0$ und seien $Q_o, Q_1 \subset \mathbb{R}^N$ beliebige Würfel. Aus der Definition von $|u|_{\mathrm{bmo}}$ erhalten wir

$$|u(x) - u_{Q_o}| = 0 \text{ ffa. } x \in Q_o \text{ sowie}$$
$$|u(x) - u_{Q_1}| = 0 \text{ ffa. } x \in Q_1.$$

Falls $Q_o \cap Q_1 \neq \emptyset$ folgt damit $u_{Q_o} = u(x) = u_{Q_1}$ ffa. $x \in Q_o \cap Q_1$. Wird der Raum $\mathbb{R}^N$ durch eine aufsteigende Folge von Würfeln ausgeschöpft ($\mathbb{R}^N = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k,\ \overline{Q}_k \subset Q_{k+1}$), so erkennt man, daß u fast überall auf $\mathbb{R}^N$ konstant ist. Aus dieser Kenntnis heraus ist die folgende Definition des Raumes BMO motiviert.

Definition 2

$$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^N) := \mathrm{bmo}(\mathbb{R}^N)/\mathbb{R}$$
$$\|u\|_{\mathrm{BMO}} := |\hat{u}|_{\mathrm{bmo}} \quad \text{mit } \hat{u} \in u \in \mathrm{BMO}.$$

$\|u\|_{\text{BMO}}$ ist wohldefiniert, d.h. insbesondere repräsentantenunabhängig. Seien dazu $u \in$BMO und $u_1, u_2 \in u$ gegeben. Aus der Definition von BMO folgt $u_1(x) = u_2(x) + c$ ffa. $x \in \mathbb{R}^N,\ c \in \mathbb{R}$. Mit den oben genannten Rechenregeln ergibt sich für einen beliebigen Würfel $Q \subset \mathbb{R}^N$

$$\int\limits_Q |u_1(x) - u_{1,Q}|dx = \int\limits_Q |u_2(x) + c - (u_2 + c)_Q|dx = \int\limits_Q |u_2(x) - u_{2,Q}|dx$$

und damit $|u_1|_{\text{bmo}} = |u_2|_{\text{bmo}}$.
Somit haben wir BMO als normierten Vektorraum mit der Norm $\|\cdot\|_{\text{BMO}}$.

Satz 3
BMO($\mathbb{R}^N$) ist vollständig bzgl. $\|u\|_{\text{BMO}}$.
Beweis:
Für zwei beliebige Würfel $Q_o \subset Q'$ und eine bel. Funktion $u \in$BMO($\mathbb{R}^N$) gilt $|u_{Q_o} - u_{Q'}| \leq c_o \cdot \|u\|_{\text{BMO}}$, denn

$$\begin{aligned} |u_{Q_o} - u_{Q'}| &= \oint\limits_{Q_o} |u_{Q_o} - u_{Q'}|dx \leq \oint\limits_{Q_o} |u_{Q_o} - u| + |u - u_{Q'}|dx \\ &\leq \|u\|_{\text{BMO}} + \frac{1}{|Q_o|}\int\limits_{Q'} |u - u_{Q'}|dx \leq \|u\|_{\text{BMO}} + \frac{|Q'|}{|Q_o|}\|u\|_{\text{BMO}} \\ &= (1 + \frac{|Q'|}{|Q_o|}) \cdot \|u\|_{\text{BMO}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Seien $\{u_k\} \subset$ BMO($\mathbb{R}^N$) eine Cauchy-Folge und $Q_o \subset \mathbb{R}^N$ ein beliebiger, aber fixierter Würfel. Wir setzen $v_k := u_k - u_{k,Q_o}$. Im weiteren bezeichne v_k einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse. Die Folge der v_k bilden eine Cauchy-Folge in $L^1(Q)$, wobei $Q \subset \mathbb{R}^N$ ein beliebiger Würfel sein kann. Um dies einzusehen, gehen wir in zwei Schritten vor. Zunächst zeigen wir, daß $\{v_k\}$ eine Cauchy-Folge in $L^1(Q')$ ist, wobei Q' ein Würfel sei, für den $Q_o \subset Q'$ gelte. Mit Hilfe von (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} |(v_j - v_k)_{Q'}| &= \left|\oint\limits_{Q'} v_j - v_k dx\right| = \left|\oint\limits_{Q'} u_j - u_{j,Q_o} - u_k + u_{k,Q_o} dx\right| \\ &= \left|\oint\limits_{Q'} u_j - u_k dx - \oint\limits_{Q'} u_{j,Q_o} - u_{k,Q_o} dx\right| = |(u_j - u_k)_{Q'} - (u_j - u_k)_{Q_o}| \\ &\leq c_o \cdot \|u_j - u_k\|_{\text{BMO}} \end{aligned}$$

und die Definition der v_k liefert

$$\begin{aligned} \|v_j - v_{j,Q'} - (v_k - v_{k,Q'})\|_{L^1(Q')} &= \|u_j - u_{j,Q'} - (u_k - u_{k,Q'})\|_{L^1(Q')} \\ &= \int\limits_{Q'} |u_j - u_k - (u_j - u_k)_{Q'}|dx \\ &\leq \|u_j - u_k\|_{\text{BMO}} \cdot |Q'| \end{aligned}$$

Damit folgt, daß

$$\begin{aligned} \|v_j - v_k\|_{L^1(Q')} &\leq \|v_j - v_{j,Q'} - (v_k - v_{k,Q'})\|_{L^1(Q')} + \|(v_j - v_k)_{Q'}\|_{L^1(Q')} \\ &\leq \|u_j - u_k\|_{\text{BMO}} \cdot |Q'| + c_o \cdot \|u_j - u_k\|_{\text{BMO}} \cdot |Q'|, \end{aligned}$$

womit gezeigt wäre, daß die $\{v_k\}$ ein Cauchy-Folge in $L^1(Q')$ bilden. Für den zweiten Schritt sei $Q \subset \mathbb{R}^N$ ein beliebiger Würfel. Dann existiert ein Würfel Q' derart, daß $Q \subset Q'$ und $Q_o \subset Q'$ erfüllt sind. Wie gerade gezeigt bilden die $\{v_k\}$ eine Cauchy-Folge in $L^1(Q')$ und aufgrund der Mengeninklusion auch in $L^1(Q)$.

Damit existiert eine eindeutig bestimmte Grenzfunktion $v \in L^1(Q)$ mit $v_k \to v$ in $L^1(Q)$. In Wirklichkeit existiert sogar eine Funktion $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ mit $v_k \to v$ in $L^1(Q)$ für beliebige Würfel Q.
Um dies zu erkennen, genügt es zu bemerken, daß für einen weiteren Würfel $\hat{Q}$ mit $Q \cap \hat{Q} \neq \emptyset$ und $v_k \to \hat{v}$ in $L^1(\hat{Q})$ die Gleichung $v = \hat{v}$ fast überall in $Q \cap \hat{Q}$ erfüllt ist. Schöpfen wir den Raum $\mathbb{R}^N$ mit einer aufsteigenden Folge von Würfeln aus, so erhalten wir gerade jene Funktion $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

v ist Grenzfunktion von u_k im Sinne der BMO-Norm:
Die Definition der v_k liefert $\|u_k - v_k\|_{\text{BMO}} = 0$ und $\|u_j - u_k\|_{\text{BMO}} = \|v_j - v_k\|_{\text{BMO}}$, also bilden die v_k ebenfalls eine CAUCHY-Folge in BMO.
Sei $\varepsilon > 0$ bel. gewählt. Sei $n_o \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, daß $\|v_j - v_k\|_{\text{BMO}} < \varepsilon \ \forall\ j,k > n_o$ ist, d.h.

$$\sup_{Q\subset\mathbb{R}^N} \fint_Q |v_j - v_k - (v_j - v_k)_Q| dx < \varepsilon \ \forall\ j,k > n_o.$$

In dieser Ungleichung können wir mit j zur Grenze übergehen und erhalten $\|v_k - v\|_{\text{BMO}} < \varepsilon$ und mit Hilfe von $\|u_k - v\|_{\text{BMO}} \leq \|u_k - v_k\|_{\text{BMO}} + \|v_k - v\|_{\text{BMO}}$ die Konvergenz in BMO. Mit der Dreiecksungleichung $\|v - u_k\|_{\text{BMO}} \geq \|v\|_{\text{BMO}} - \|u_k\|_{\text{BMO}}$ folgt, daß v in BMO ist.

Bleibt noch zu zeigen, daß v nicht von Q_o abhängt. Wir fixieren einen weiteren Würfel Q_1 und setzen $w_k := u_k - u_{k,Q_1}$. Analog wie oben erhalten wir eine Funktion $w \in \text{BMO}(\mathbb{R}^N)$ mit $w_k \to w$ in $L^1(Q)$ für beliebige Würfel Q und $\|w - u_k\|_{\text{BMO}} \to 0$ für $k \to \infty$. Für einen beliebigen Würfel Q gilt

$$\begin{aligned}\int_Q |v - w| dx &\leq \int_Q |v - u_k| dx + \int_Q |u_k - w| dx \\ &\leq |Q| \cdot (\|v - u_k\|_{\text{BMO}} + \|w - u_k\|_{\text{BMO}})\end{aligned}$$

und somit $v = w$ f.ü. in $\mathbb{R}^N$. ■

Äquivalente Norm

Bevor eine äquivalente Norm angegeben wird, zeigen wir ein Kriterium, mit dessen Hilfe die Zugehörigkeit einer Funktion zum Raum BMO überprüft werden kann.

Lemma 4
Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und es gelte $\sup_{Q\subseteq\Omega}\left(\fint_Q |u(x) - c_Q| dx\right) < \infty$ für Konstanten c_Q, die vom Würfel Q abhängen können. Dann ist $u \in$bmo(Ω).
Beweis:

$$\begin{aligned}\sup_{Q\subseteq\Omega}\left(\fint_Q |u(x) - u_Q| dx\right) &\leq \sup_{Q\subseteq\Omega}\left(\fint_Q |u(x) - c_Q| + |c_Q - u_Q| dx\right) \\ &= \sup_{Q\subseteq\Omega}\left(\fint_Q |u(x) - c_Q| dx + |c_Q - \fint_Q u(x) dx|\right) \\ &\leq \sup_{Q\subseteq\Omega}\left(\fint_Q |u(x) - c_Q| dx + \fint_Q |c_Q - u(x)| dx\right) \\ &= 2 \cdot \sup_{Q\subseteq\Omega}\left(\fint_Q |u(x) - c_Q| dx\right) < +\infty\end{aligned}$$

■

Mit Hilfe des Lemmas wird folgende Beziehung nachvollziehbar, die gleichzeitig eine äquivalente Norm charakterisiert,

$$\frac{1}{2}|u|_{\text{bmo}} \leq \sup_{Q\subset\mathbb{R}^N}\left(\inf_{c\in\mathbb{R}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |u(x) - c| dx\right) \leq |u|_{\text{bmo}}.$$

Inklusion von $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N)$

$L^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \text{BMO}(\mathbb{R}^N)$ (echte Inklusion!)
Beweis:
Sei $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $Q \subset \mathbb{R}^N$ Würfel. Mit der Ungleichung

$$\fint_Q |u(x) - u_Q| dx \leq \fint_Q \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + |u_Q| dx = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + |u_Q| \leq 2 \cdot \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

folgt $\sup\limits_{Q\subseteq\mathbb{R}^N}\left(\fint_Q |u(x)-u_Q|dx\right) \leq 2\cdot\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.
Es gilt: $u(x) := \ln|x| \in \mathrm{bmo}(\Omega)$, aber $u \notin L^\infty(\Omega)$ für $0\in\Omega$.
Beweis folgt in Bemerkung 12.

Definition des Raumes BMO(Ω)

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ eine fixierte offene Menge.

Definition 5

1. $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt von beschränkter mittlerer Oszillation, wenn

$$|u|_{\mathrm{bmo}(\Omega)} := \sup_{Q\subseteq\Omega}\left(\fint_Q |u(x)-u_Q|dx\right) < +\infty,\ Q \text{ Würfel in Standardlage;}$$

2. $\mathrm{bmo}(\Omega) := \left\{u\in L^1_{loc}(\Omega)\mid |u|_{\mathrm{bmo}(\Omega)} < +\infty\right\}$;
3. $\mathrm{BMO}(\Omega) := \mathrm{bmo}(\Omega)/\mathbb{R}$;
4. $\|u\|_{\mathrm{BMO}(\Omega)} := |\hat{u}|_{\mathrm{bmo}(\Omega)}\quad$ mit $\hat{u}\in u\in\mathrm{BMO}(\Omega)$.

Satz 6
BMO(Ω) ist Banach-Raum, wenn Ω zusammenhängend ist.

Satz von John/Nirenberg, Äquivalente Charakterisierung

Bevor wir zum Satz von John/Nirenberg kommen können, müssen wir ein nützliches Resultat von Calderon und Zygmund zur Verfügung stellen.

Satz 7 (Zerlegungssatz von Calderon/Zygmund)
Sei $u\in L^1(Q), Q\subset\mathbb{R}^N$ Würfel. Sei $s>0$, so daß $\fint_Q |u|dx \leq s$.

Dann existieren $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset Q$ paarweise disjunkte offene Würfel mit:
(1) $|u|\leq s$ f.ü. in $Q\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$,
(2) $\fint_{Q_k} |u(x)|\,dx \leq 2^N s\quad\forall k\in\mathbb{N}$,
(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|Q_k| \leq \frac{1}{s}\int_Q |u|dx$.

Beweis:
Q sei (durch halbieren jeder Kante) in 2^N gleichgroße Würfel geteilt. $Q_{11}, Q_{12}\ldots$ bezeichne die offenen Würfel, für die $|u|_{Q_{1k}} := \fint_{Q_{1k}} |u|dx \geq s$ gilt. Für diese Würfel gilt:

$$s\,|Q_{1k}| \leq \int_{Q_{1k}} |u|dx \leq \int_Q |u|dx \leq s\,|Q| = s\,2^N\,|Q_{1k}|.$$

Die verbleibenden Würfel, für die $\fint|u|dx < s$ gilt, seien wieder in jeweils 2^N gleichgroße Würfel geteilt. $Q_{21}, Q_{22}\ldots$ bezeichne dabei die offenen Würfel, für die $|u|_{Q_{2k}} \geq s$ gilt. Die verbleibenden Würfel werden wiederum geteilt, u.s.w. . Auf diese Weise erhalten wir eine Folge von offenen Würfeln Q_{ik}, die wir in Q_k umbennen, für die gilt:

$$s\,|Q_k| \leq \int_{Q_k} |u|dx \leq s\,2^N\,|Q_k|.$$

Also gilt für diese Würfel Eigenschaft (2). Durch Summation der linken Ungleichung über k erhalten wir (3). Eigenschaft (1) ergibt sich mit folgender Überlegung:
Da u über ganz Q integrierbar ist, sind fast alle Punkte von Q Lebesgue-Punkte von u. Dieses gilt dann ebenfalls für $Q\setminus\bigcup Q_k$. Für einen Lebesgue-Punkt x gilt allgemein

$$\lim_{i\to\infty}\fint_{W_i} |u(y)|dy = |u(x)|,$$

wenn für die Folge von Würfeln $\{W_i\}$ gilt $x \in W_i$, $W_{i+1} \subseteq W_i \ \forall i \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{i\to\infty} |W_i| = 0$. $\quad (*)$
Sei $x \in Q \backslash \bigcup Q_k$ LEBESGUE-Punkt. Dann existiert nach obiger Konstruktion eine Folge von Würfeln $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, für die $(*)$ gilt und $|u|_{W_i} < s \ \ \forall\, i \in \mathbb{N}$.
Damit gilt $|u(x)| = \lim\limits_{i\to\infty} \oint\limits_{W_i} |u(y)|dy \leq s$ und somit (1). ■

Satz 8 (JOHN/NIRENBERG)
Sei $u \in$bmo(Ω) , $Q_o \subset \Omega$ Würfel, $u_{\sigma,Q_o} := \{x \in Q_o \mid |u(x) - u_{Q_o}| > \sigma\}$.

Dann:

$$|u_{\sigma,Q_0}| \leq B \cdot |Q_0| \cdot e^{\frac{-\alpha\sigma}{|u|_{\text{bmo}(\Omega)}}} \quad \forall\, \sigma > 0,$$

wobei $B > 0$, $\alpha > 0$ nur von der Dimension N abhängen.

Für den Beweis benötigen wir folgendes **Lemma**:
Definiere: $F(\sigma) := \sup\{\frac{|f_{\sigma,Q}|}{\int\limits_Q |f(x)-f_Q|dx} \mid Q \subset \Omega, f \in \text{bmo}(\Omega), 0 < |f|_{\text{bmo}(\Omega)} \leq 1\}$.

Dann gilt:
① $F(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma}$,
② $F(\sigma) \leq \frac{1}{s} \cdot F(\sigma - 2^N s) \qquad \forall\, \sigma \geq 2^N \ \forall\, 2^{-N}\sigma \geq s \geq 1$,
③ $F(\sigma) \leq A \cdot e^{-\alpha\sigma} \quad \forall\, \sigma \geq \frac{2^N e}{e-1}$ und Konstanten $A, \alpha > 0$.

Beweis:
① Angenommen $F(\sigma) > \frac{1}{\sigma} \Rightarrow \ \exists\, Q \subset \Omega, f \in \text{bmo}(\Omega) : \frac{|f_{\sigma,Q}|}{\int\limits_Q |f(x)-f_Q|dx} > \frac{1}{\sigma}$

$\Rightarrow |f_{\sigma,Q}| > \int\limits_Q \frac{|f(x)-f_Q|}{\sigma} dx \geq \int\limits_{f_{\sigma,Q}} \frac{|f(x)-f_Q|}{\sigma} dx \geq |f_{\sigma,Q}|$, was zum Widerspruch führt

$\Big[f_{\sigma,Q} = \{x \in Q \mid |f(x) - f_Q| > \sigma\} = \{x \in Q \mid \frac{|f(x)-f_Q|}{\sigma} > 1\}\Big]$.

② Seien $\sigma \geq 2^N, 2^{-N}\sigma \geq s \geq 1, Q \subset \Omega, f \in \text{bmo}(\Omega)$ mit $0 < |f|_{\text{bmo}(\Omega)} \leq 1$ beliebig.
Es gilt: $\oint\limits_Q |f - f_Q|dx \leq |f|_{\text{bmo}(\Omega)} = |f - f_Q|_{\text{bmo}(\Omega)} \leq 1 \leq s$.
Damit können wir C/Z auf $f - f_Q$ und den Würfel Q anwenden. Die Würfel Q_k seien aus C/Z übernommen.

$$\begin{aligned} |f_{\sigma,Q}| &= |\{x \in Q \mid |f(x) - f_Q| > \sigma\}| \\ &= |\{x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \mid |f(x) - f_Q| > \sigma\}| && [\text{da } \sigma > s \text{ und mit C/Z (1)}] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\{x \in Q_k \mid |f(x) - f_Q| > \sigma\}| && [\ Q_k \text{ paarweise disjunkt}] \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\{x \in Q_k \mid |f(x) - f_{Q_k}| > \sigma - 2^N s\}| && [\text{C/Z (2)}] \end{aligned}$$

$$\left[\sigma < |f(x) - f_Q| \leq |f(x) - f_{Q_k}| + |f_{Q_k} - f_Q| \leq |f(x) - f_{Q_k}| + \oint\limits_{Q_k} |f - f_Q|dx \leq |f(x) - f_{Q_k}| + 2^N s\right]$$

Da $|f - f_{Q_k}|_{\text{bmo}(\Omega)} \leq 1$ folgt für jeden Summanden aus der Definition von F

$|\{x \in Q_k \mid |f(x) - f_{Q_k}| > \sigma - 2^N s\}| \leq F(\sigma - 2^N s) \int\limits_{Q_k} |f(x) - f_{Q_k}|dx$

$\leq F(\sigma - 2^N s) \cdot |Q_k| \cdot \|f - f_Q\| \leq F(\sigma - 2^N s) \cdot |Q_k|$

und damit und C/Z (3) folgt
$|f_{\sigma,Q}| \leq F(\sigma - 2^N s) \sum\limits_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq \frac{1}{s} F(\sigma - 2^N s) \int\limits_Q |f(x) - f_Q|dx$.

Da Q und f beliebig waren, können wir in dieser Ungleichung zum Supremum übergehen und erhalten somit die Behauptung.

③ Setze $\alpha := \frac{1}{2^N e}$. Falls $F(\sigma) \leq A \cdot e^{-\alpha\sigma}$, dann folgt aus ② mit $s = e$ und $\sigma + 2^N e$ anstelle von σ

$F(\sigma + 2^N e) \leq \frac{1}{e} \cdot F(\sigma) \leq \frac{1}{e} \cdot A \cdot e^{-\alpha\sigma} = A \cdot e^{-\alpha(\sigma + 2^N e)}$.

Wenn also $F(\sigma) \leq A \cdot e^{-\alpha\sigma}$ für alle σ eines Intervalls $[z, z + 2^N e]$ mit $z \in \mathbb{R}$ gilt, dann gilt diese Ungleichung für alle $\sigma \geq z$.
Es gilt mit ①: $F(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma} \leq \underbrace{2^{-N} e^{\frac{1}{e-1}} (1 - \frac{1}{e})}_{=:A} \; e^{-\alpha\sigma}$ für $\frac{2^N e}{e-1} \leq \sigma \leq \frac{2^N e}{e-1} + 2^N e$ und damit ③.

$\left[\text{Betrachte } g(\sigma) := \frac{e^{\alpha\sigma}}{\sigma} \text{ und bestimme } A = \min_{z \in \mathbb{R}_+} \{A(z)\} \text{ wobei } A(z) := \max_{\sigma \in [z, z+2^N e]} \{g(\sigma)\}\right]$.

Beweis von Satz 8:
Seien u und Q_o entsprechend den Voraussetzungen des Satzes gegeben.
Vorerst nehmen wir $|u|_{\text{bmo}(\Omega)} = 1$ an.
Nach Konstruktion von $F(\sigma)$ gilt für $\sigma \geq \frac{2^N e}{e-1}$

$$\begin{aligned} |u_{\sigma,Q_o}| &\leq F(\sigma) \int_{Q_o} |u(x) - u_{Q_o}| dx \\ &\leq A \cdot e^{-\alpha\sigma} \int_{Q_o} |u(x) - u_{Q_o}| dx \\ &= 2^{-N} e^{\frac{1}{e-1}} (1 - \frac{1}{e}) \cdot e^{-\alpha\sigma} \int_{Q_o} |u(x) - u_{Q_o}| dx \\ &\leq \underbrace{e^{\frac{1}{e-1}}}_{=:B} \cdot e^{-\alpha\sigma} \int_{Q_o} |u(x) - u_{Q_o}| dx \\ &\leq B \cdot e^{-\alpha\sigma} \cdot |Q_o|. \end{aligned}$$

Da $B \cdot e^{-\alpha\sigma} > 1$ für $0 < \sigma < \frac{2^N e}{e-1}$ ist und $|u_{\sigma,Q_o}| \leq |Q_o|$, gilt die Ungleichung $|u_{\sigma,Q_o}| \leq B \cdot e^{-\alpha\sigma} \cdot |Q_o|$ schon für jedes $\sigma > 0$.

Sei nun $|u|_{\text{bmo}(\Omega)} > 0$ beliebig.
Wir definieren $\tilde{u} := \frac{u}{|u|_{\text{bmo}(\Omega)}}$. Damit ist $|\tilde{u}|_{\text{bmo}(\Omega)} = 1$ und es gilt

$$|\tilde{u}_{\sigma,Q_o}| \leq B \cdot e^{-\alpha\sigma} \cdot |Q_o| \quad \forall\ \sigma > 0.$$

Setzen wir anstelle von σ den Wert $\frac{\sigma}{|u|_{\text{bmo}(\Omega)}}$ in diese Ungleichung ein, so erhalten wir

$$\left|\left\{x \in Q_o \mid |\tilde{u}(x) - \tilde{u}_{Q_o}| > \frac{\sigma}{|u|_{\text{bmo}(\Omega)}}\right\}\right| \leq B \cdot e^{-\alpha \frac{\sigma}{|u|_{\text{bmo}(\Omega)}}} \cdot |Q_o|$$

Beachtet man, daß $\tilde{u}_{Q_o} = \frac{1}{|u|_{\text{bmo}(\Omega)}} \cdot u_{Q_o}$ ist und damit

$$\frac{\sigma}{|u|_{\text{bmo}(\Omega)}} < |\tilde{u}(x) - \tilde{u}_{Q_o}| = \frac{1}{|u|_{\text{bmo}(\Omega)}} |u(x) - u_{Q_o}|,$$

so folgt daraus die Behauptung. ∎

Folgerung 9 (Äquivalente Charakterisierung)
Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

1^o $u \in \mathrm{bmo}(\Omega)$

2^o $\exists B, b > 0 \; \forall \, Q \subset \Omega \; \forall \, \sigma > 0 : \quad |u_{\sigma,Q}| \leq B \cdot |Q| \cdot e^{-b\sigma}$

3^o $\exists B, b > 0 \; \forall \, 1 \leq p < +\infty : \quad \left(\sup\limits_{Q \subset \Omega} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |u - u_Q|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{b} (B \cdot p \cdot \Gamma(p))^{\frac{1}{p}}$

4^o $\exists C, c > 0 \; \forall \, Q \subset \Omega : \; \int\limits_Q e^{c \cdot |u - u_Q|} dx \leq C \cdot |Q|.$

Beweis:

$1^o \Rightarrow 2^o$: Folgt direkt aus (J/N) mit $b := \frac{\alpha}{|u|_{\mathrm{bmo}(\Omega)}}$.

$2^o \Rightarrow 3^o$:
Sei $Q \subset \Omega$ beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_Q |u(x) - u_Q|^p dx &= p \cdot \int\limits_0^\infty |u_{\sigma,Q}| \; \sigma^{p-1} d\sigma \\
&\leq p \cdot B \cdot |Q| \cdot \int\limits_0^\infty e^{-b\sigma} \sigma^{p-1} d\sigma && [2^o] \\
&= p \cdot B \cdot |Q| \cdot \int\limits_0^\infty e^{-s} \left(\frac{s}{b}\right)^{p-1} \frac{1}{b} \; ds && [s = b\sigma] \\
&= p \cdot B \cdot |Q| \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^p \cdot \underbrace{\int\limits_0^\infty e^{-s} s^{p-1} ds}_{=\Gamma(p)}
\end{aligned}$$

Dividieren wir die entstandene Ungleichung durch $|Q|$, hängt die rechte Seite nicht mehr vom gewählten Würfel Q ab. Wir können auf der linken Seite zum Supremum über alle Würfel $Q \subset \Omega$ übergehen und erhalten 3^o durch potenzieren mit $\frac{1}{p}$.

$3^o \Rightarrow 1^o$: Setzen wir in 3^o für p=1 ein, folgt unmittelbar $|u|_{\mathrm{bmo}(\Omega)} < \frac{B}{b}$ und somit 1^o.

$2^o \Rightarrow 4^o$: Es gilt allgemein

$$\int\limits_\Omega \varphi(f(x)) dx = \int\limits_0^{+\infty} |\{x \in \Omega \mid f(x) > \sigma\}| \; \varphi'(\sigma) \; d\sigma.$$

Wird $\varphi(\sigma) := e^\sigma - 1$ gesetzt für $\sigma \in [0, +\infty[$ und $f(x) := \frac{b}{2} \cdot |u(x) - u_Q|$, so erhalten wir mit Hilfe von 2^o für einen beliebigen Würfel $Q \subset \Omega$

$$\begin{aligned}
\int\limits_Q e^{\frac{b}{2}|u(x) - u_Q|} dx - |Q| &= \int\limits_0^{+\infty} |\{x \in Q \mid \frac{b}{2}|u(x) - u_Q| > \sigma\}| \cdot e^\sigma d\sigma \\
&\leq B \cdot |Q| \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-b \cdot \frac{2}{b} \sigma} \cdot e^\sigma d\sigma \\
&= B \cdot |Q| \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma} d\sigma = B \cdot |Q|
\end{aligned}$$

Mit der Addition von $|Q|$ in dieser Ungleichung ergibt sich 4^o, wobei $C := B + 1$ und $c := \frac{b}{2}$ sind.

$4^o \Rightarrow 2^o$: Seien $Q \subset \Omega$ ein Würfel und $\sigma > 0$ beliebig. Aus 4^o folgt

$$C \cdot |Q| \geq \int\limits_Q e^{c \cdot |u - u_Q|} dx \geq \int\limits_{u_{\sigma,Q}} e^{c \cdot |u - u_Q|} dx \geq e^{c \cdot \sigma} \cdot |u_{\sigma,Q}|$$

Mit $B := C$ und $b := c$ ergibt sich damit 2^o. ■

Bemerkung 10
Bedingung 2^o läßt sich wie folgt abschwächen, ohne daß dabei die Zugehörigkeit der Funktion u zum Raum $\text{bmo}(\Omega)$ verloren geht:
Sei $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Es gelte:

$$\exists\ B, b > 0\ \forall\ Q \subseteq \Omega\ \exists\ c_Q = c(Q) = \text{const.}\ \forall\ \sigma > 0 :\ |\{x \in Q \mid |u(x) - c_Q| > \sigma\}| \leq B \cdot |Q| \cdot e^{-b\sigma}. \tag{2}$$

Dann ist $u \in \text{bmo}(\Omega)$, denn $\int\limits_Q |u(x) - c_Q| dx \leq \int\limits_0^\infty |\{x \in Q \mid |u(x) - c_Q| > \sigma\}| d\sigma \leq \frac{B}{b} \cdot |Q|$.
Mit Lemma 4 folgt nun die Behauptung.

Folgerung 11
Sei $Q_o \subset \Omega$ ein beliebiger Würfel. Dann gilt die Inklusion $\text{bmo}(Q_o) \subset \bigcap\limits_{1 \leq p < +\infty} L^p(Q_o)$.

Beweis:
Aus dem Beweisschritt $2^o \Rightarrow 3^o$ von Folgerung 9 wissen wir, daß $\int\limits_{Q_o} |u - u_{Q_o}|^p dx \leq p \cdot B \cdot |Q_o| \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^p \cdot \Gamma(p)$ ist. Also haben wir $\|u - u_{Q_o}\|_{L^p(Q_o)} \leq \frac{1}{b}\left(p \cdot B \cdot |Q_o| \cdot \Gamma(p)\right)^{\frac{1}{p}}$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt nun die Behauptung:

$$\|u\|_{L^p(Q_o)} \leq \|u - u_{Q_o}\|_{L^p(Q_o)} + \|u_{Q_o}\|_{L^p(Q_o)} \leq \frac{1}{b}\left(p \cdot B \cdot |Q_o| \cdot \Gamma(p)\right)^{\frac{1}{p}} + |Q_o|^{\frac{1}{p}-1}\|u\|_{L^1(Q_o)}.$$

■

Bemerkung 12
Wenn $u(x) := \ln|x|$ für $x \in \Omega$ ist, gilt schon $u \in \text{bmo}(\Omega)$.
Zum Beweis wollen wir die Bemerkung 10 benutzen. Sei dazu $Q \subseteq \Omega$ bel. Würfel mit Kantenlänge h.
Seien $\xi, \eta \in \overline{Q}$ so gewählt, daß $|\xi| = \max\limits_{x \in \overline{Q}} |x|$, $|\eta| = \min\limits_{x \in \overline{Q}} |x|$.
Sei $x \in Q$, $x \neq 0$ beliebig gewählt. Dann ist $|u(x) - u(\xi)| = \ln\frac{|\xi|}{|x|}$ und somit

$$\{x \in Q \mid |u(x) - u(\xi)| > \sigma\} = \{x \in Q \mid \ln\frac{|\xi|}{|x|} > \sigma\} = \{x \in Q \mid e^{-\sigma}|\xi| > |x|\} =: u^\xi_\sigma.$$

Das bedeutet, daß $u^\xi_\sigma = B_{e^{-\sigma}|\xi|}(0) \cap Q$. Die Werte von $u(\xi)$ sollen (in Abhängigkeit vom Würfel Q) die Rolle der in (2) benutzten c_Q übernehmen. Nun wird der Radius der Kugel $B_{e^{-\sigma}|\xi|}(0)$ derart erweitert, daß wir Konstanten B und b bestimmen können, die (2) genügen. Zu diesem Zweck reicht es aus, nur $u^\xi_\sigma \neq \emptyset$ zu betrachten. Dann ist $\eta \in u^\xi_\sigma$ und es gilt $|\xi|e^{-\sigma} \geq |\eta| \geq |\xi| - |\xi - \eta| \geq |\xi| - \sqrt{N}h$. Damit ist also $|\xi| \leq \frac{\sqrt{N}h}{1-e^{-\sigma}}$ und somit $u^\xi_\sigma \subset B_{\frac{\sqrt{N}h}{e^\sigma - 1}}(0)$. Für das Maß von u^ξ_σ gilt folglich $|u^\xi_\sigma| \leq (\frac{\sqrt{N}}{e^\sigma - 1})^N \cdot |B_1| \cdot |Q|$, wobei $|B_1|$ das Maß der Einheitskugel bezeichne.
Sei $f(\sigma) := (\frac{\sqrt{N}}{e^\sigma - 1})^N |B_1|$ für $\sigma > 0$. Lösen wir $f(\sigma_o) = 1$, erhalten wir $\sigma_o = \ln(1 + \sqrt{N}|B_1|^{\frac{1}{N}})$.
Es gilt

$$f(\sigma) > 1 \text{ für } 0 < \sigma < \sigma_o \quad \text{und} \quad f(\sigma) < 1 \text{ für } \sigma > \sigma_o. \tag{3}$$

Gesucht wird nun eine Funktion der Form $g(\sigma) = B \cdot e^{-b\sigma}$, für die (3) analog gilt und die für $\sigma > \sigma_o$ die Ungleichung $g(\sigma) \geq f(\sigma)$ erfüllt. Für eine Funktion g mit diesen Eigenschaften gilt für $\sigma \geq \sigma_o$:

$$|u^\xi_\sigma| \leq f(\sigma) \cdot |Q| \leq g(\sigma) \cdot |Q|.$$

Für $0 < \sigma < \sigma_o$ folgt aus der Inklusion $u^\xi_\sigma \subseteq Q$ aber $|u^\xi_\sigma| \leq |Q| \leq g(\sigma) \cdot |Q|$ und wir hätten damit die Voraussetzungen für die Bemerkung 10 erfüllt.
Man kann nun nachprüfen, daß für $B := (1 + \sqrt{N}|B_1|^{\frac{1}{N}})^N$ und $b := N$ die Funktion g den oben geforderten Eigenschaften genügt. Es sei explizit erwähnt, daß die Konstanten B und b nicht vom gewählten Würfel Q abhängen. Also ist $u \in \text{bmo}(\Omega)$.

Literatur

[1] M.Christ, *Lectures on singular integral operators*, Proc. IMA Participating Institutions Conference, AMS (1989).

[2] C.L.Fefferman, E.M.Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[3] S.Fučik, O.John, A.Kufner, *Functions spaces*, Prag (1977).

[4] M.Giaquinta, *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems*, Basel (1993).

[5] F.John,L.Nirenberg: *On Functions of Bounded Mean Oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. 14, (1961), 415-426.